Mathématiques

Durée : 3 heures. - Coefficient : 3
Les exercices sont indépendants.
La calculatrice personnelle est interdite.

Exercice 1

Notations : $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de dimension 3 sur le corps $\mathbb{C}$. a, b, c sont des nombres complexes. On note I, J et $M(a,b,c)$ les matrices suivantes

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

On note $j = e^{2i\pi/3}$. $j^2 = \overline{j} = e^{4i\pi/3}$ est une autre racine cubique de l'unité.

Partie I

I.1. Calculer J^2 et J^3.

I.2. Déterminer les valeurs propres de J. La matrice J est-elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{C}$? L'est-elle sur le corps $\mathbb{R}$?

I.3. Pour chaque valeur propre de J déterminer le vecteur propre associé ayant 1 pour première composante, et une matrice P de passage à une base de vecteurs propres.

I.4. Exprimer la matrice $M(a,b,c)$ à l'aide des matrices I, J et J^2. En déduire que $H = \left\{M(a,b,c) \mid (a,b,c) \in \mathbb{C}^3\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ pour les lois usuelles (somme et loi externe). Précisez la dimension de H.

I.5. Montrer que les vecteurs propres (complexes) de J sont aussi vecteurs propres de J^2 ainsi que de $M(a,b,c)$. En déduire les valeurs propres de $M(a,b,c)$ à l'aide de celles de J, puis en fonction du nombre complexe j.

I.6. Montrer que tout élément de H est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Donner la décomposition de $M(a,b,c)$ en fonction de la matrice P du I.3 et d'une matrice diagonale que l'on explicitera.

I.7. On suppose ici que les coefficients (a,b,c) sont réels.

a) Montrer que toutes les valeurs propres de $M(a,b,c)$ sont réelles si et seulement si $b = c$.

b) Déterminer les valeurs propres de $M(a,b,c)$ ainsi que les *sous-espaces propres réels* associés.

Partie II

Soit E un espace vectoriel euclidien réel de dimension 3, de base orthonormée $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On note Id l'endomorphisme identité de E. Dans cette partie, on s'intéresse à une étude géométrique des endomorphismes $f_{a,b,c}$ différents de Id dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est $M(a,b,c)$, en supposant que les coefficients (a,b,c) sont réels. Il est recommandé d'utiliser les résultats trouvés dans la première partie.

II.1. Montrer qu'il existe deux couples (a,b) tels que $f_{a,b,b}$ ait pour seules valeurs propres 1 et -1.
Préciser les sous-espaces propres associés. Donner la nature géométrique de $f_{a,b,b}$ dans les deux cas.

II.2. Montrer qu'il existe deux couples (a,b) tels que $f_{a,b,b}$ ait pour seules valeurs propres 1 et 0.
Préciser les sous-espaces propres associés. Donner la nature géométrique de $f_{a,b,b}$ dans les deux cas.

II.3. a) À quelles conditions nécessaires et suffisantes une matrice 3×3 à coefficients réels représente-t-elle la matrice dans la base $\mathcal{B}$ d'une rotation ?

b) Montrer que J et J^2 sont des matrices de rotation de E, préciser le cosinus de leurs angles de rotation.

c) Montrer que $f_{a,b,c}$ est une rotation vectorielle si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et $a + b + c = 1$. En déduire que $ab + bc + ca = 0$.
Préciser l'axe de rotation ainsi que le cosinus de son angle de rotation en fonction de (a,b,c).

Exercice 2

Dans ce qui suit, la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On considère les équations différentielles, de fonction inconnue f en la variable réelle x

$$(E_1) \qquad f'(x) + xf(x) = 0$$

$$(E_2) \qquad f'(x) + xf(x) = x^3$$

1. Donner la solution générale de (E_1) et l'unique solution f_0 telle que $f_0(0) = 1$.

2. Donner la solution générale de (E_2), et la fonction f_1 solution de (E_2) et telle que $f_1(0) = 0$.

   Dans la suite de l'exercice, on pose $F(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ et on note $I(R) = \displaystyle\int_0^R e^{\frac{-x^2}{2}}\ dx$.

3. a) Montrer que $A = \displaystyle\int_0^\infty F(t)\ dt = \lim_{R\to+\infty} I(R)$ existe.

   b) Soit $J(R) = \displaystyle\iint_C F(x)F(y)\,dxdy$ avec $C = [0,R]\times[0,R] = [0,R]^2$.
   Exprimer $J(R)$ en fonction de $I(R)$.

   c) Soit $K(R) = \displaystyle\iint_D F(x)F(y)\,dxdy$ avec $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant x, 0\leqslant y, x^2+y^2\leqslant R^2\right\}$.
   Montrer que pour tout R positif, on a $K(R)\leqslant J(R)\leqslant K\left(R\sqrt{2}\right)$.

   d) Calculer la valeur de $K(R)$ par passage en coordonnées polaires. Calculer $\lim\limits_{R\to+\infty} K(R)$ et en déduire que $A = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

4. On considère la fonction $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt)F(t)\ dt$.

   a) Justifier l'existence de $g(x)$.

   b) En admettant que l'on peut dériver sous l'intégrale, démontrer que g est solution de (E_1). [On transformera l'expression trouvée pour $g'(x)$ à l'aide d'une intégration par parties].

   c) En déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de $F(x)$.

5. Donner le développement en série entière (et le rayon de convergence) de $G(x) = \displaystyle\int_0^x F(t)\ dt$.

Exercice 3

$P(z) = (z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)$ est un polynôme de degré 3 dont les racines complexes a_1, a_2, a_3 sont distinctes. On note b_1, b_2 les racines du polynôme $P'(z)$, dérivé de $P(z)$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$, les points A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 sont les points d'affixes respectives a_1, a_2, a_3, b_1, b_2.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{P'(z)}{P(z)}$.

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{(b_1-a_k)} = 0$. Que peut-on écrire pour b_2 ?

3. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} \lambda_k\overrightarrow{A_kB_1} = \overrightarrow{0}$ pour des coefficients λ_k réels à préciser, et que le point B_1 est à l'intérieur du triangle (A_1,A_2,A_3) [On rappelle que le barycentre de trois points dont les coefficients sont strictement positifs est intérieur au triangle défini par ces trois points]. Que peut-on dire de B_2 ?

4. Calculer le coefficient de z dans $P'(z)$ à l'aide de a_1, a_2, a_3, et en déduire que le point G, centre de gravité du triangle (A_1,A_2,A_3) est le milieu du segment $[B_1,B_2]$.

5. On se propose de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les points B_1, B_2 associés au triangle (A_1,A_2,A_3) soient confondus.

   a) On suppose pour commencer que le centre du gravité G du triangle (A_1,A_2,A_3) est à l'origine. Que peut-on en déduire pour le coefficient de z^2 dans $P(z)$? Démontrer que dans ce cas on a $B_1 = B_2$ si et seulement si (A_1,A_2,A_3) est équilatéral de cercle circonscrit de centre O.

   b) En déduire une propriété analogue dans le cas général.

6. On se propose de montrer que les angles de vecteurs $\left(\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1B_1}\right)$ et $\left(\overrightarrow{A_1B_2},\overrightarrow{A_1A_2}\right)$ sont égaux.

   a) Montrer que $3(z-b_1)(z-b_2) = (z-a_1)(z-a_2)+(z-a_2)(z-a_3)+(z-a_3)(z-a_1)$ pour tout nombre complexe z.

   b) Montrer que $3(a_1-b_1)(a_1-b_2) = (a_1-a_2)(a_1-a_3)$, puis que les arguments des nombres complexes $\dfrac{b_1-a_1}{a_3-a_1}$ et $\dfrac{a_2-a_1}{b_2-a_1}$ sont égaux (à 2π près).

   c) En déduire l'égalité des angles $\left(\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1B_1}\right)$ et $\left(\overrightarrow{A_1B_2},\overrightarrow{A_1A_2}\right)$. Donner par la même méthode deux autres égalités angulaires.

   d) Si dans le triangle (A_1,A_2,A_3) le point B_1 est connu, donner une construction géométrique du point B_2.